

Total No. of Printed Pages—7

2 SEM FYUGP MINMTH2

2025

(May/June)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH2

(**Real Analysis**)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) তলৰ সংহতিটোৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা : 2

Find the supremum and infimum of the following set :

$$= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 25\}$$

- (b) গণন আৰু অগণন সংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা । 2

Define countable and uncountable set.

(2)

(c) প্রমাণ কৰা, যদি $a \in \mathbb{R}$ এনেকুৰা যে সকলো $\varepsilon > 0$ ব
বাবে $0 \leq a < \varepsilon$, তেন্তে $a = 0$. 3
Prove that, if $a \in \mathbb{R}$ is such that $0 \leq a < \varepsilon$
for every $\varepsilon > 0$, then $a = 0$.

(d) যদি $a, b \in \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে
If $a, b \in \mathbb{R}$, then show that
 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 3

(e) যদি (If)
 $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

তেন্তে প্রমাণ কৰা $\inf S = 0$.
then prove that $\inf S = 0$. 4

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে $[0, 1]$ অন্তৰালত বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি
অগণনীয়।

Prove that the set of real numbers in the
interval $[0, 1]$ is uncountable.

(f) $x \in \mathbb{R}$ ব বাবে সংহতি A নিৰ্ণয় কৰা য'ত
 $|2x+3| \leq 7$. 1

Determine the set A of $x \in \mathbb{R}$ where
 $|2x+3| \leq 7$.

2. (a) শূন্য অণুক্ৰম বুলিলে কি বুজা? 1
What do you mean by a null sequence?

P25/1350

(Continued)

(3)

(b) প্রমাণ কৰা যে এটা অভিসাৰী অণুক্ৰমৰ দুটা পৃথক সীমা
নথাকে। 4

Prove that a convergent sequence
cannot tend to two distinct limits.

(c) প্রমাণ কৰা (যি কোনো এটা) : 4
Prove that (any one) :

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \dots + n^{1/n}] = 1$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1$$

(d) ক'চি অভিসাৰী সম্বন্ধীয় সাধাৰণ সূত্র প্রয়োগ কৰি
দেখুওৱা যে $\langle U_n \rangle$ অণুক্ৰমটো অভিসাৰী য'ত
Apply Cauchy's general principle of
convergence to show that the sequence
 $\langle U_n \rangle$ is convergent where

$$U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \quad 5$$

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে $\langle U_n \rangle$ অণুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান আৰু
উচ্চ পৰিবদ্ধ। ইয়াৰ সীমা নিৰ্ণয় কৰা য'ত

Prove that the sequence $\langle U_n \rangle$ is
monotonic increasing and bounded
above. Find its limit where

$$U_n = \frac{3n+1}{n+2}$$

P25/1350

(Turn Over)

(4)

(e) এটা অণুক্ৰমৰ অভিসাৰিতা সম্বন্ধীয় ক'চিৰ সাধাৰণ সূত্ৰটো লিখা। 2

Write the Cauchy's general principle of convergence of a sequence.

(f) প্রমাণ কৰা যে $\langle n^2 \rangle$ অণুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান। 3

Prove that the sequence $\langle n^2 \rangle$ is monotonic increasing.

3. (a) যোগাত্মক শ্ৰেণী কাক বোলে? 1

What is called positive series?

(b) অসীম গুণোত্তৰ শ্ৰেণীৰ $a + ar + ar^2 + \dots$ ৰ অভিসাৰিতা আৰু অপসাবিতাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা। 2

State the condition for convergence and divergence of the infinite geometric series $a + ar + ar^2 + \dots$.

(c) প্রমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক শ্ৰেণী

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \infty$$

অভিসাৰি যদি $p > 1$.

Prove that a positive term series

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \infty$$

is convergent if $p > 1$.

(5)

(d) প্রমাণ কৰা যে এটা অসীম শ্ৰেণী $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ অভিসাৰী হ'বনে হ'লে $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ চৰ্তটো আৱশ্যকীয়। 4

Prove that the necessary condition for the convergence of an infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is that $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

অথবা / Or

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা বা অপসাবিতা আলোচনা কৰা :

Discuss the convergence or divergence of the following series :

$$\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + \frac{5}{4^p} + \dots$$

4. (a) ক'চিৰ মূল পৰীক্ষাটো বৰ্ণনা কৰা আৰু তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 1+3=4

State Cauchy's root test and examine the convergence of the following series :

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2 \sqrt{2}}{3^2} + \frac{x^3 \sqrt{3}}{4^3} + \dots$$

(6)

- (b) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : $4 \times 2 = 8$
Test the convergence of any two of the following :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} x^n, x > 0$

(iii) $\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$

(iv) $\frac{x}{\sqrt{1}} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} - \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \dots$

- (c) এটা অসীম শ্ৰেণী অভিসাৰি হোৱাৰ বাবে লিবনীজ পৰীক্ষাৰ চৰ্ত তিনিটা লিখা।

3

Write the three conditions of Leibnitz test for the convergence of an infinite series.

(২০২৩ বৰ্ষৰ পৰীক্ষার্থীৰ বাবে ২০ নম্বৰৰ অতিবিস্তৃত প্ৰশ্ন)

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

5. দেখুওৱা যে পৰিমেষ সংখ্যাৰ সংহতি গণনাকৃত।
Show that the set of rational numbers is countable.

5

(7)

6. অণুক্ৰমৰ অভিসাৰিতাৰ ক'চিৰ সাধাৰণ সূত্ৰটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা।
Establish Cauchy's general principle of convergence of sequences. 5
7. শ্ৰেণীৰ বাবে ক'চিৰ সাধাৰণ অভিসৰণ নীতিটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা।
Establish Cauchy's general principle of convergence of series. 5
8. n -তম পদ $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ শ্ৰেণীৰ বাবে আচৰণ পৰীক্ষা কৰা।
Investigate the behaviour of the series whose n -th term is $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$. 5
