Total No. of Printed Pages—8

2 SEM FYUGP MTHC2

2025

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC2

(Real Analysis and Differential Equations)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions

UNIT—I

1. Rৰ ত্ৰিবিভাজন ধৰ্মটো লিখা। 1

Write the trichotomy property of R.

2. মুক্ত অন্তৰাল (a, a)ক এটা সংহতি হিচাপে প্ৰকাশ কৰা। 1

Express the open interval (a, a) as a set.

3. যদি $a \in R$ যাতে যি কোনো $\varepsilon > 0$ ৰ বাবে $0 \le a < \varepsilon$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a = 0$. 2

If $a \in R$ is such that $0 \le a < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$, then prove that $a = 0$.

4. (a) যদি $S=\left\{\frac{1}{n}|n\in N\right\}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\inf S=0$. 1

If $S=\left\{\frac{1}{n}|n\in N\right\}$, then show that $\inf S=0$.

(b) যদি $x\in R$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $n_x\in N$ পোৱা যাব যাতে $x\le n_x$. 2

If $x\in R$, then prove that there exists $n_x\in N$ such that $x\le n_x$.

(c) যদি $y>0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $n_y\in N$ পোৱা যাব যাতে $n_y-1<y<n_y$. 2

If $y>0$, then show that there exists $n_y\in N$ such that $n_y-1<y<n_y$.

5. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা : 3

Answer any *one* :

(a) যদি $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in N$ বন্ধ আৰু সীমাবদ্ধ অন্তৰালৰ এটা অন্তৰ্নিহিত অনুক্ৰম হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে এটা $\xi\in R$ পোৱা যাব যাতে সকলো $n\in N$ৰ বাবে $\xi\in I_n$.

If $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in N$ is a nested sequence of closed bounded intervals, then prove that there exists a number $\xi\in R$ such that $\xi\in I_n$ for all $n\in N$.

(b) দেখুওৱা যে একক অন্তৰাল $[0,1]=\{x\in R:0\le x\le 1\}$ গণনযোগ্য নহয়।

Show that the unit interval $[0,1]=\{x\in R:0\le x\le 1\}$ is not countable.

6. যদি x আৰু y দুটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় যাতে $x<y$, তেন্তে দেখুওৱা যে এটা অপৰিমেয় সংখ্যা z পোৱা যাব যাতে $x<z<y$. 3

If x and y are real numbers with $x<y$, then show that there exists an irrational number z such that $x<z<y$.

UNIT—II

7. $\{n^2\}$ অনুক্ৰমটোৰ 3-টেইলটো লিখা। 1

Write the 3-tail of the sequence $\{n^2\}$.

8. প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অনুক্ৰম এটা সীমাবদ্ধ অনুক্ৰম। 2

Prove that a convergent sequence of real numbers is bounded.

9. (a) অনুক্ৰম $X=\{x_n\}$ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা, য'ত 2

Examine the convergence of the sequence $X=\{x_n\}$ where

$$x_n=\frac{n^2}{n+1}$$

(b) $\sum x_n$ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা, য'ত

Examine the convergence of $\sum x_n$ where

$$\sum x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$ 2

10. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা : 4

Answer any *one* :

(a) প্ৰমাণ কৰা যে $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ অনুক্ৰমটো এটা কচি অনুক্ৰম। এই অনুক্ৰম কিয় অভিসাৰী হয়, যুক্তি দিয়া।

Prove that the sequence $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ is a Cauchy sequence. State why it is convergent.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুক্ৰম এটা অভিসাৰী হ'ব যদি আৰু যদিহে ই এটা কচি অনুক্ৰম হয়।

Prove that a sequence of real numbers is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

11. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা : 4

Answer any *one* :

(a) অনুক্ৰমৰ একেস্বৰ অভিসৰণ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

State and prove monotone convergence theorem for sequence.

(b) দেখুওৱা যে p-শ্ৰেণী

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ টো}$$

$p>1$ৰ বাবে অভিসাৰী আৰু $0<p\leq 1$ৰ বাবে অপসাৰী।

Show that the p-series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converges when $p>1$ and diverges when $0<p\leq 1$.

UNIT—III

12. যদি e^{mx} ধ্ৰুৱক mৰ কিছু নিৰ্দিষ্ট মানৰ বাবে

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0 \text{ ৰ}$$

এটা সমাধান হয়, তেন্তে mৰ মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা। 2

For certain values of the constant m, the function e^{mx} is a solution of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

Determine all such values of m.

13. যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any *one* :

(a) $(1+e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}(1-e^{\frac{x}{y}})\,dy = 0$

(b) $y(xy+2x^2y^2)\,dx + x(xy - x^2y^2)\,dy = 0$

14. যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any *one* :

(a) $y^2dx + (3xy-1)\,dy = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

1

15. যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any *one* :

(a) $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$

(b) $(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

UNIT—IV

16. (a) যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any *one* :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0,\ y(0) = -4,\ y'(0) = 2$

(ii) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0$

(b) সমাধান কৰা : 4

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$$

17. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা : 4

Answer any *one* :

(a) অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা :

Solve by the method of undetermined coefficients :

$$y'' + 6y' + 9y = 2\sin x$$

(b) সমাধান কৰা :

Solve :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} - 8y = 4\log x$$

18. প্ৰাচলসমূহৰ ভেদ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা : 4

Solve by the method of variation of parameters :

$$\frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

19. (a) এটা অৱকল সমীকৰণৰ ৰৈখিকভাৱে স্বাধীন সমাধানসমূহৰ ৰন্সকিয়ানৰ মানৰ প্ৰকৃতি কেনেকুৱা? 1

What is the nature of the value of the Wronskian of the linearly independent solutions of a differential equation?

(b) দেখুওৱা যে e^{-x}, e^{3x} আৰু e^{4x} ফলনকেইটা

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

সমীকৰণৰ ৰৈখিকভাৱে স্বাধীন সমাধান। এতেকে সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা। 2+1=3

Show that the functions e^{-x}, e^{3x} and e^{4x} are all linearly independent solutions of

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

and hence, write the general solution of the equation.

(অতিৰিক্ত ২০ নম্বৰ ২০২৩ বৰ্ষৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ বাবে)

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

20. অনুক্ৰমৰ বলযেন'-বেইৰষ্ট্ৰাচ উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Bolzano-Weierstrass theorem for sequences.

21. অনুক্ৰমৰ অপসাৰিতাৰ চৰ্ত লিখি প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove divergence criteria for sequences.

22. তলৰ যি কোনো দুটাৰ সমাধান কৰা : 5×2=10

Solve any *two* from the following :

(i) $\frac{dy}{dx}+y=x^2e^{-x}$

(ii) $\frac{d^4y}{dx^4}-y=0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{2x}$

★★★