Total No. of Printed Pages—8

4 SEM FYUGP MTHC4B

2025

(June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4B

(Riemann Integration and Series of Functions)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$ ৰ টেগড্ পাৰ্টিশ্যনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define a tagged partition of $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $[a, b]$ ত সীমাবদ্ধ থকা এটা ফলন f ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন $[a, b]$ ৰ সাপেক্ষে নিম্ন আৰু ঊৰ্ধ্ব সমষ্টিৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define the upper and lower sums of a function f bounded on $[a, b]$ with respect to a partition of $[a, b]$.

(c) যদি [0, 1] ত f এটা একস্বৰ ক্ৰমবৰ্ধমান ফলন হয় আৰু $P=\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$, [0, 1] ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন হয়, তেন্তে $L(f, P)$ আৰু $U(f, P)$ নিৰ্ণয় কৰা। 4

If P is a partition of [0, 1] given by

$$P=\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

and f is a strictly increasing function on [0, 1], then find $L(f, P)$ and $U(f, P)$.

(d) যদি $\forall \varepsilon>0$, $[a, b]$ ত সীমাবদ্ধ এটা ফলন f এ নিম্নোক্ত চৰ্ত

$$U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$$

সিদ্ধ কৰে য'ত P, $[a, b]$ ৰ এক পাৰ্টিশ্যন, তেন্তে দেখুওৱা যে f, $[a, b]$ ত অনুকলনীয় হ'ব। 4

If $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ a bounded function f on $[a, b]$ satisfying $U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$, where P is a partition of $[a, b]$, then show that f is integrable on $[a, b]$.

(e) দিয়া আছে (Given)

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

f অনুকলনীয় হয় নে নহয়, পৰীক্ষা কৰা। 4

investigate whether f is integrable or not.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে সকলো সীমাবদ্ধ ফলন অনুকলনীয় নহয়।

Establish that all bounded functions are not integrable.

(f) দেখুওৱা যে যদি $[a, b]$ ত f এটা সীমাবদ্ধ ফলন যিটো ডাৰ্বিউ অনুকলনীয়, সেই ফলন $[a, b]$ ত ৰীমান অনুকলনীয় হ'ব। 4

Establish that Darboux's integrability of a bounded function f on $[a, b]$ implies Riemann integrability of that function on $[a, b]$.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে (Show that)

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx\,;\; x\in[a, b]$$

$[a, b]$ ত অনবিচ্ছিন্ন আৰু যদি f, $x\in[a, b]$ ত অনবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে F অৱকলনীয় হ'ব আৰু তেতিয়া $f=F'$ হ'ব।

is continuous on $[a, b]$ and if f is continuous on $x\in[a, b]$, then F is differentiable and $f=F'$.

2. *(a)* তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 2×2=4

Examine the convergence of any *two* of the following :

(i) $\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}dx$

(ii) $\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)^3}$

(iii) $\int_0^\infty \sin x^2\, dx$

(b) দেখুওৱা যে

Show that

(i) $\int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$

(ii) $\frac{\Gamma(n)}{c^n} = \int_0^\infty e^{-cy} y^{n-1}\, dy$ 2+2=4

(c) দেখুওৱা যে

Show that

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$ 3

3. *(a)* বাস্তৱ ফলনৰ অনুক্ৰমৰ বিন্দুমাত্ৰিক অভিসাৰিতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define pointwise convergence of a sequence of functions on $\mathbb{R}$.

(b) দিয়া আছে (Given)

$$f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$$
$$f_n(k) = n(\text{mod } k);\ k = 1, 2, 3$$

য'ত $n(\text{mod } k)$, kক nৰে হৰণ কৰিলে থকা বাকী। দেখুওৱা যে (f_n) বিন্দুমাত্ৰিক অভিসাৰী নহয়। 2

where $n(\text{mod } k)$ is the remainder when n divides k. Show that (f_n) does not converge pointwise.

(c) তলৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া : 4×4=16

Answer any *four* of the following :

(i) যদি $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে (f_n), $[0, \infty)$ত সমমাত্ৰিকভাৱে 0 লৈ অভিসাৰী হ'ব।

If $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, then show that the sequence (f_n) converges uniformly to 0 on $[0, \infty)$.

(ii) (f_n) অনুক্ৰমৰ বাবে ক'চিৰ সমমাত্ৰিক অনুক্ৰমৰ চৰ্ত লিখি প্ৰমাণ কৰা, য'ত $f_n : X \to \mathbb{R}$; $X \subseteq \mathbb{R}$.

State and prove Cauchy's criterion of uniform convergence for the sequence (f_n), where

$$f_n : X \to \mathbb{R}\ ;\ X \subseteq \mathbb{R}$$

(iii) ফলনৰ শ্ৰেণীৰ নিশ্চিত আৰু সমমাত্ৰিক অভিসাৰিতাৰ ৱেইৰস্ট্ৰাচৰ M-টেষ্টটো উল্লেখ কৰা আৰু ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো সমমাত্ৰিক অভিসাৰী :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt;\ 0 < r < 1$$

State Weierstrass M-test for absolute and uniform convergence of a series of functions and hence show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt;\ 0 < r < 1$$

converges uniformly.

(iv) দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো যি কোনো অন্তৰাল $[a, b]$ত সমমাত্ৰিকভাৱে অভিসাৰী :

Show that the following series is uniformly convergent on any interval $[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

(v) যদি (f_n) সমমাত্ৰিকভাৱে f লৈ Xৰ ওপৰত অভিসাৰী হয়, য'ত $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আৰু f_n বোৰ $a \in X$ত অনবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে f, $a \in X$ত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব।

If (f_n), where $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converges uniformly on X to f and f_n's are continuous at $a \in X$, then show that f is continuous at $a \in X$.

4. (a) সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ক f_n ; $n = 0, 1, 2, \cdots$ ফলনৰ অসীম শ্ৰেণী হিচাবে প্ৰকাশ কৰা। 1

Express the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ in the form of an infinite series of functions f_n ; $n = 0, 1, 2, \cdots$.

(b) সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ৰ বাবে এটা বিস্তৃত বাস্তৱ সংখ্যা R নিৰ্ণয় কৰা যাতে $\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. 3

For the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ determine an extended real number R such that $\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

(c) যদি এটা সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ নিশ্চিত আৰু সমমাত্ৰিকভাৱে f লৈ অভিসাৰী হয়, দেখুওৱা যে f, $(-R, R)$ত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব, য'ত R; $0 < R \leq \infty$, এটা বিস্তৃত বাস্তৱ সংখ্যা। 3

If a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converges absolutely and uniformly to a function f, show that there exists an extended real number R; $0 < R \leq \infty$ such that f is continuous on $(-R, R)$.

(d) আবেল'ৰ সীমা সূত্ৰ উল্লেখ কৰি, ইয়াৰ সহায়েৰে দেখুওৱা যে সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ সমমাত্ৰিকভাৱে অভিসাৰী। 4

State Abel's limit theorem and use it to show that the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

is uniformly convergent.

★★★

Total No. of Printed Pages—7

4 SEM FYUGP MTHC4D

2025

(June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4D

(PDE and System of ODE)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ ঘাত লিখা। 1

Write the degree of the PDE $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

(b) $y^2 p - xyq = x(z-2y)$ সমীকৰণটোৰ লাগ্ৰাঞ্জৰ সহায়ক সমীকৰণ লিখা। 1

Write the Lagrange's auxiliary equation for $y^2 p - xyq = x(z-2y)$.

(c) ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

Define linear partial differential equation.

(d) সমাধান কৰা (যি কোনো এটাৰ) : 5

Solve (any *one*) :

(i) $yzp + zxq = xy$

(ii) $z(x+y)p + z(x-y)q = x^2 + y^2$

2. (a) Charpitৰ পদ্ধতিৰে $p = (z+qy)^2$ সমীকৰণটোৰ সম্পূৰ্ণ সমাধান উলিওৱা। 5

Find the complete integral of the equation $p = (z+qy)^2$ by Charpit's method.

অথবা / Or

$p_3 x_3 (p_1 + p_2) + x_1 + x_2 = 0$ ৰ সম্পূৰ্ণ সমাধান উলিওৱা।

Find the complete integral of $p_3 x_3 (p_1 + p_2) + x_1 + x_2 = 0$.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u$ সমীকৰণটোৰ কেনোনিকেল আকাৰত হ্ৰাস কৰা আৰু সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা। 6

Reduce the equation

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

to canonical form and obtain the general solution.

অথবা / Or

$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = 4e^{-2y}$ প্ৰাৰম্ভিক সমস্যাটোৰ চলক পৃথকিকৰণ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা।

Solve the initial value problem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \; u(0, y) = 4e^{-2y}$$

by the method of separation of variables.

3. (a) $Rr + Ss + Tt + f(x, y, z, p, q) = 0$ সমীকৰণটোৰ অধিবৃত্তীয় হোৱাৰ চৰ্ত লিখা। 1

Write the condition when the equation $Rr + Ss + Tt + f(x, y, z, p, q) = 0$ is parabolic.

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ সমীকৰণটো শ্ৰেণীভুক্ত কৰা। 2

Classify the equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ সমীকৰণটোক কেনোনিকেল আকাৰত হ্ৰাস কৰা। 5

Reduce the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

to canonical form.

অথবা / Or

সমাধান কৰা (solve) :

$$p+r+s=1$$

(d) একমাত্ৰিক তৰংগ সমীকৰণ উলিওৱা। 7

Derive one-dimensional wave equation.

অথবা / Or

চলক পৃথকীকৰণ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি একমাত্ৰিক তাপ সমীকৰণ সমাধান কৰা।

Solve one-dimensional heat equation by the method of separation of variables.

4. (a) দ্বি-মাত্ৰিক তাপ সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপ লিখা। 1

Write the general form of two-dimensional wave equation.

(b) চলক পৃথকীকৰণ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা: 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Solve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ using the method of separation of variable.

অথবা / Or

সমাধান কৰা (Solve) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

যেতিয়া / when

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}$$

5. (a) চলক সহগ থকা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ ৰৈখিক ব্যৱস্থাৰ উদাহৰণ লিখা। 1

Write an example of linear system of ODE with variable coefficient.

(b) $\frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=e^{3t}$ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণটো প্ৰথম বৰ্গৰ ব্যৱস্থা অৱকল সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰিত কৰা। 3

Transform the linear differential equation

$$\frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=e^{3t}$$

into system of first-order differential equation.

অথবা / Or

$2\frac{dx}{dt}+6\frac{dy}{dt}+7y=t$ সমীকৰণক স্বাভাৱিক ৰূপত লিখা।

Write the equation $2\frac{dx}{dt}+6\frac{dy}{dt}+7y=t$ into normal form.

(c) ধৰা (Let) $L_1 \equiv 2D+1$, $L_2 \equiv D^2+1$, $f(t)=t^3$ য'ত (where) $D \equiv \frac{d}{dt}$, দেখুওৱা যে (show that) $L_1L_2f=L_2L_1f$. 4

অথবা / Or

$\frac{dx}{dt}=6x-3y$, $\frac{dy}{dt}=2x+y$ ৰ সমাধানত জড়িত সমীকৰণটোৰ বৈশিষ্ট্যমূলক মূলবোৰ উলিওৱা।

Find the characteristic roots of the equation associated in the solution of

$$\frac{dx}{dt}=6x-3y,\quad \frac{dy}{dt}=2x+y$$

6. (a) অইলাৰৰ পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰা। 5

Describe Euler's method.

অথবা / Or

$\frac{dy}{dx}=x+y$, $y(0)=1$ ৰ সঠিক সমাধানটোক সংযুক্ত কৰা ফলনটোৰ প্ৰথম দুটা আনুমানিক মান নিৰ্ণয় কৰা।

Find first two approximations of the function that approximate the exact solution of the equation

$$\frac{dy}{dx}=x+y,\ y(0)=1$$

(b) $\frac{dx}{dt}=5x-2y$, $\frac{dy}{dt}=4x-y$, সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা। 6

Find the general solution of the linear system of equations

$$\frac{dx}{dt}=5x-2y,\quad \frac{dy}{dt}=4x-y$$

অথবা / Or

অপাৰেটৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা :

Using operator method, find the general solution of the following equations :

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-x-3y=e^t$$
$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x=e^{3t}$$

★★★