

2025

(November)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC5A

(Multivariate Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) $w = xy \log z$ ফলনৰ আদিক্ষেত্র উল্লেখ কৰা। 1

State the domain of the function
 $w = xy \log z$.

- (b) (x, y, z) ত f ফলনৰ সমতল পৃষ্ঠৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

Define level surface of the function f at
 (x, y, z) .

- (c) দেখুওৱা যে

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

সকলো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, মূলবিন্দু $(0, 0)$ বাদে। 3

(2)

Show that

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at every point, except the origin (0, 0).

অথবা / Or

দেখুওৱা যে $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ ফলনৰ কোনো সীমা

নাই, যেতিয়া (x, y) , $(0, 0)$ ৰ কাষ চাপে।

Show that the function $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

has no limit as (x, y) approaches $(0, 0)$.

(d) যদি $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$, তেন্তে $(4, -5)$

বিন্দুত $\frac{\partial f}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial f}{\partial y}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

2

Find the values of $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ at the point

$(4, -5)$, if $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$.

(e) যদি $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$ হয়, তেন্তে

$(0, 0, 0)$ বিন্দুত $\frac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial z}{\partial y}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3

Find the values of $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$ at $(0, 0, 0)$,

if $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$.

26P/39

(Continued)

(3)

অথবা / Or

$(2, 0)$ বিন্দুত $f(x, y) = xe^x + \cos(xy)$ ৰ

$\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ দিশত অৱকলজ উলিওৱা।

Find the derivative of $f(x, y) = xe^x + \cos(xy)$ at the point $(2, 0)$ in the direction of $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$.

(f) $z = x\cos y - ye^x$ ৰ $(0, 0, 0)$ ত পৃষ্ঠৰ স্পৰ্শক সমতল উলিওৱা।

2

Find the tangent plane to the surface $z = x\cos y - ye^x$ at $(0, 0, 0)$.

(g) যদি $f(x, y)$ ৰ আদিক্ষেত্ৰৰ এটা বিন্দু (a, b) ত এটা স্থানীয় চৰম মান থাকে আৰু যদি তাত প্ৰথম আংশিক অৱকলজ থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $f_x(a, b) = 0$ আৰু $f_y(a, b) = 0$.

3

If $f(x, y)$ has a local extremum value at a point (a, b) of its domain and if the first partial derivative exists there, then prove that $f_x(a, b) = 0$ and $f_y(a, b) = 0$.

অথবা / Or

$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ ফলনৰ স্থানীয় চৰম মানসমূহ উলিওৱা।

Find the local extreme values of the function

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

26P/39

(Turn Over)

(4)

- (h) $2x + y - z - 5 = 0$ সমতলৰ ওপৰত $P(x, y, z)$ বিন্দুটো উলিওৱা যিয়ে মূলবিন্দুৰ আটাইতকৈ ওচৰত থাকে।

4

Find the point $P(x, y, z)$ on the plane $2x + y - z - 5 = 0$ that is closest to the origin.

অথবা / Or

বৃত্ত $x^2 + y^2 = 1$ ৰ ওপৰত $f(x, y) = 3x + 4y$ ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু ন্যূনতম মান উলিওৱা।

Find the maximum and minimum values of the function $f(x, y) = 3x + 4y$ on the circle $x^2 + y^2 = 1$.

2. (a) অনুকল $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx$ ৰ বাবে অনুকলন অঞ্চলটো অংকন কৰা।

1

Sketch the region of integration for the integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx$$

- (b) $\iint_R xy dx dy$ উলিওৱা, য'ত R হৈছে বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ ৰ এক-চতুৰ্থাংশ য'ত $x \geq 0$ আৰু $y \geq 0$.

3

Evaluate $\iint_R xy dx dy$, where R is the quadrant of the circle $x^2 + y^2 = a^2$, where $x \geq 0$ and $y \geq 0$.

26P/39

(Continued)

(5)

- (c) ফিউবিনি'ৰ প্ৰথম প্ৰকাৰৰ উপপাদ্য উল্লেখ কৰা। 1

State Fubini's theorem of first form.

- (d) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

য'ত R হৈছে x -অক্ষ আৰু $y = \sqrt{1-x^2}$ বক্ৰৰ দ্বাৰা সীমাবদ্ধ অৰ্ধবৃত্তাকাৰ অঞ্চল।

3

Prove that

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

where R is the semicircular region bounded by the x -axis and the curve $y = \sqrt{1-x^2}$.

- (e) গোলক $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ৰ বাবে গোলাকাৰ স্থানাংক সমীকৰণটো উলিওৱা।

4

Find a spherical coordinate equation for the sphere $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

অথবা / Or

মান নিৰ্ণয় কৰা :

Evaluate :

$$\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3-r^2}} dz r dr d\theta$$

- (f) $z = x^2 + 3y^2$ আৰু $z = 8 - x^2 - y^2$ পৃষ্ঠৰ দ্বাৰা আবৃত D অঞ্চলটোৰ আয়তন উলিওৱা।

4

26P/39

(Turn Over)

Find the volume of the region D enclosed by the surfaces $z = x^2 + 3y^2$ and $z = 8 - x^2 - y^2$.

3. (a) এটা ভেক্টৰ ক্ষেত্রৰ বেখা অনুকলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define line integrals of a vector field.

(b) হেলিক্স $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$, $0 \leq t \leq \pi$ ব ওপৰেৰে যোৱা $f(x, y, z) = 2xy + \sqrt{z}$ ৰ বেখা অনুকলন উলিওৱা। 3

Find the line integral of $f(x, y, z) = 2xy + \sqrt{z}$ over the helix $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$, $0 \leq t \leq \pi$.

(c) এটা বস্তৰ বক্র $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$ ৰ কাষেৰে $(0, 0, 0)$ পৰা $(1, 1, 1)$ লৈ স্থানান্তৰ কৰোঁতে বলক্ষেত্র $\vec{F} = (y - x^2)\hat{i} + (z - y^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$ দ্বাৰা কৰা কাম উলিওৱা। 4

Find the work done by the force field $\vec{F} = (y - x^2)\hat{i} + (z - y^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$ in moving an object along the curve $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$, from $(0, 0, 0)$ to $(1, 1, 1)$.

অথবা / Or

বৃত্ত $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ৰ চাৰিওফালে $\vec{F} = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ ক্ষেত্রৰ প্রচলন উলিওৱা।

Find the circulation of the field $\vec{F} = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ around the circle $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(d) বেখা অনুকলনৰ মৌলিক উপপাদ্য প্রমাণ সহকাৰে উল্লেখ কৰা। 5

State and prove the fundamental theorem of line integral.

অথবা / Or

$\int_1^2 \int_{1/y}^y \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}} dx dy$ অনুকলনটোৰ মান নির্ণয় কৰা।

Evaluate the integral $\int_1^2 \int_{1/y}^y \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}} dx dy$.

4. (a) $\vec{F} = xz\hat{i} - xy\hat{j} - z\hat{k}$ ৰ প্রবাহৰ ঘনত্ব উলিওৱা। 1

Find the flux density of $\vec{F} = xz\hat{i} - xy\hat{j} - z\hat{k}$.

(b) অধিবৃত্তাকাৰ চুঙা $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$ ৰ মাজেৰে যোৱা $\vec{F} = yz\hat{i} + x\hat{j} - z^2\hat{k}$ ৰ প্রবাহ উলিওৱা। 2

Find the flux of $\vec{F} = yz\hat{i} + x\hat{j} - z^2\hat{k}$ through the parabolic cylinder $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$.

(c) গ্রীনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি

$$\oint_C \{(\cos x \sin y - xy) dx + \sin x \cos y dy\}$$

মান উলিওৱা, য'ত C হ'ল xy -সমতলৰ ধনাত্মক দিশত বৰ্ণনা কৰা বৃত্ত $x^2 + y^2 = 1$.

3

Evaluate by Green's theorem

$$\oint_C \{(\cos x \sin y - xy) dx + \sin x \cos y dy\}$$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$ in the xy -plane described in the positive.

(d) ষ্টোকচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ৰ মান

উলিওৱা, যদি $\vec{F} = x^2\hat{i} + 2x\hat{j} + z^2\hat{k}$ আৰু C হ'ল xy -সমতলৰ উপবৃত্ত $4x^2 + y^2 = 4$, যেতিয়া ওপৰৰ পৰা ঘড়ীৰ কাটাৰ বিপৰীত দিশে চোৱা হয়।

5

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ by using Stokes' theorem, if $\vec{F} = x^2\hat{i} + 2x\hat{j} + z^2\hat{k}$ and C is the ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ in the xy -plane, counterclockwise when viewed from above.

অথবা /Or

ডাইভাৰজেন্স উপপাদ্য প্ৰমাণ সহকাৰে উল্লেখ কৰা।

State and prove divergence theorem.
