

5 SEM FYUGP PHYC5A

2025

(November)

PHYSICS

(Core)

Paper : PHYC5A

(Mathematical Physics—II)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

1×6=6

Choose the correct answer :

- (a) এটা যুগ্ম ফলনৰ বাবে ফুৰিয়েৰ সহগসমূহ হ'ল

For an even function, the Fourier coefficients are

(i) $a_0 = 0, a_n \neq 0, b_n = 0$

(ii) $a_0 = 0, a_n \neq 0, b_n \neq 0$

(iii) $a_0 \neq 0, a_n \neq 0, b_n = 0$

(iv) $a_0 \neq 0, a_n = 0, b_n \neq 0$

(2)

(b) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ শৃংখলাটোৰ যোগফল হৈছে

The sum of the series $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ is

(i) $\frac{\pi^2}{8}$

(ii) $\frac{\pi^2}{12}$

(iii) $\frac{\pi^2}{6}$

(iv) $\frac{\pi^2}{10}$

(c) শক্তি শৃংখলা সমাধান সেইবোৰ অৱকলন সমীকৰণৰ বাবে প্ৰযোজ্য যিবোৰ হ'ল

The power series solution is applicable to those differential equations which are

(i) দ্বিতীয় ক্ৰম আৰু n ডিগ্ৰীৰ
second order of degree n

(ii) আংশিক অৱকলন সমীকৰণ
partial differential equation

(iii) বৈখিক সমগোত্ৰীয় সমীকৰণ
linear homogeneous equation

(iv) ওপৰৰ কোনোটোৱেই নহয়
None of the above

(3)

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0$ অৱকলন সমীকৰণটোক

তলৰ কোনটো নামেৰে জনা যায় ?

The differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0$$

is known as

(i) লিজেণ্ডাৰ সমীকৰণ/Legendre equation

(ii) বেচেল সমীকৰণ/Bessel equation

(iii) হাৰমাইট সমীকৰণ/Hermite equation

(iv) লেগুৰি সমীকৰণ/Laguerre equation

(e) যদি $P_n(x)$ লিজেণ্ডাৰ বহুপদ হয়, তেন্তে $\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx$ ৰ মান হ'ব

If $P_n(x)$ represents the Legendre polynomials, then the value of $\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx$ is

(i) 0

(ii) 1

(iii) $\frac{2}{2n+1}$

(iv) $\frac{2n+1}{2}$

(f) তলৰ কোনটো আংশিক অৱকলন সমীকৰণ নহয় ?

Which of the following is not a partial differential equation?

(i) লেপ্লাচ সমীকৰণ

Laplace equation

(ii) লেগুৱেৰ সমীকৰণ

Laguerre equation

(iii) প্ৰসাৰণ সমীকৰণ

Diffusion equation

(iv) ওপৰৰ কোনোটোৱেই নহয়

None of the above

2. চমুকৈ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো ছয়টা) :

2×6=12

Answer briefly (any six) :

(a) ফলন এটাৰ ফুৰিয়েৰ শৃংখলাটো সমভাৱে কেন্দ্ৰমুখী হ'বলৈ হলে ফলনটোৱে কি কি চৰ্ত পূৰণ কৰিব লাগিব ?

What are the conditions that a function must satisfy so that the Fourier series of the function converges uniformly?

(b) পাৰ্চেভালৰ উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰা।

Prove Parseval's theorem.

(c) অৱকলন সমীকৰণৰ একক বিন্দু (singular points) বুলিলে কি বুজা ? $x = -1$ বিন্দুটো

$x^2(x+1) \frac{d^2y}{dx^2} + (x^2-1) \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ অৱকলন

সমীকৰণৰ একক বিন্দু হয়নে ?

1+1=2

(Continued)

What do you mean by singular points of a differential equation? Find, if $x = -1$ is a singular point of the differential equation

$$x^2(x+1) \frac{d^2y}{dx^2} + (x^2-1) \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(d) দেখুওৱা যে

Show that

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

(e) $2-3x+4x^2$ বাৰ্ষিক লিজেন্ডাৰ বহুপদৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰা।

Express $2-3x+4x^2$ in terms of Legendre polynomials.

(f) $I = \int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$ অখণ্ডটোক বিটা ফলনৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰা আৰু ইয়াৰ মান উলিওৱা।

Express the integral $I = \int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$ in terms of beta function and hence evaluate it.

(g) কাৰ্টেছিয়ান স্থানাংক আৰু গোলাকাৰ স্থানাংকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক উল্লেখ কৰা।

State the relation between Cartesian coordinates and spherical coordinates.

3. ফুৰিয়েৰ শৃংখলাটো জটিল ৰূপত লিখা। জটিল ৰূপটোৰ সহগসমূহ a_0 , a_n আৰু b_n ৰ সৈতে সম্পৰ্ক স্থাপন কৰা। 4

Write down the Fourier series in complex form. Establish the relationship of the coefficients of the complex form with a_0 , a_n and b_n .

4. প্রমাণ কৰা যে/Prove that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. 4

অথবা/Or

$$m > 0, n > 0 \text{ হ'লে প্রমাণ কৰা যে } \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

$$\text{Prove that } \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ for } m > 0, n > 0.$$

5. $-\pi < x < \pi$ ব্যৱধানত $f(x) = x + x^2$ ফলনৰ বাবে x ৰ বহুগুণৰ চাইন আৰু কটাইনৰ শৃংখলা বিচাৰা। দেখুওৱা যে

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad 5$$

Find a series of sines and cosines of multiples of x for the function $f(x) = x + x^2$ in the interval $-\pi < x < \pi$. Deduce that

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

অথবা/Or

অযুগ্ম আৰু যুগ্ম ফলন কাক বোলে? ফুৰিয়েৰ শৃংখলা ব্যৱহাৰ কৰি $y = \cos 2x$ ফলনটো $(0, \pi)$ ব্যৱধানত চাইন শৃংখলাত প্ৰসাৰিত কৰা।

What are odd and even functions? By using Fourier series, expand the function $y = \cos 2x$ in a series of sines in the interval $(0, \pi)$.

6. প্রমাণ কৰা যে/Prove that

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad 5$$

অথবা/Or

প্রমাণ কৰা যে/Prove that

$$\int_0^1 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = 0$$

7. প্রমাণ কৰা যে $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ আৰু

তাৰপৰা $P_2(x)$ ৰ মান উলিওৱা। 5

Prove that $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ and then find the value of $P_2(x)$.

8. কাৰ্টেছিয়ান স্থানাংকত একমাত্ৰিক তৰংগ সমীকৰণৰ সমাধান উলিওৱা। 5

Find the solution of one-dimensional wave equation in Cartesian coordinates.

অথবা/Or

নলাকাৰ স্থানাংকত দ্বিমাত্ৰিক লেপ্লাচৰ সমীকৰণৰ সমাধান উলিওৱা।

Find the solution of two-dimensional Laplace's equation in cylindrical coordinates.

9. ফ্রোবেনিয়াছ পদ্ধতিৰে তলৰ অৱকলন সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 6

Solve the following differential equation by Frobenius method :

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + (1 - x^2)y = 0$$

অথবা/Or

বেচেলৰ অৱকলন সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

Solve the Bessel's differential equation :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

10. চলকসমূহৰ পৃথকীকৰণ পদ্ধতিৰে তলত দিয়া আংশিক অৱকলন সমীকৰণসমূহ সমাধান কৰা : 4+4=8

Solve the following partial differential equations by the method of separation of variables :

(i) $\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial t}$, দিয়া আছে যে $u(0, y) = 8e^{-3y}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial t}$, under the condition
 $u(0, y) = 8e^{-3y}$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = e^{-t} \cos x$, দিয়া আছে যে $t = 0$ হ'লে

$u = 0$; $x = 0$ হ'লে $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = e^{-t} \cos x$, under the condition $u = 0$

at $t = 0$; $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ at $x = 0$

★★★