

3 SEM FYUGP PHYC3A

2 0 2 5

(Nov/Dec)

PHYSICS

(Core)

Paper : PHYC3A

(Mathematical Physics—I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. তলত দিয়াসমূহৰ পৰা শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা : $1 \times 5 = 5$

Choose the correct answer from the following :

(a) $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$ অৱকলজ সমীকৰণটোৰ অৰ্ধৰ আৰু

ডিগ্ৰী হৈছে

The order and degree of the differential equation $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$ are

(i) অৰ্ধৰ 1, ডিগ্ৰী 1

order 1, degree 1

(2)

(ii) অর্ডাৰ 1, ডিগ্রী 2

order 1, degree 2

(iii) অর্ডাৰ 2, ডিগ্রী 1

order 2, degree 1

(iv) অর্ডাৰ 2, ডিগ্রী 2

order 2, degree 2

(b) $u = e^x \sin y$ ৰ প্ৰথম অর্ডাৰৰ আংশিক অৱকলজ কি ?What is the first-order partial derivative of $u = e^x \sin y$?(i) $u_x = e^x \sin y, u_y = e^x \sin y$ (ii) $u_x = xe^x \sin y, u_x = e^x \sin y$ (iii) $u_x = e^x \sin y, u_y = e^x \cos y$ (iv) $u_x = e^x \sin y, u_x = -e^x \cos y$ (c) যদি $\vec{r}$ যি কোনো এটা স্থানাংক ভেক্টৰ হয়, তেন্তে $\text{div } \vec{r}$ ৰ মান হ'বIf $\vec{r}$ is any position vector, then the value of $\text{div } \vec{r}$ is(i) $x+y+z$ (ii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (iii) $3x+3y+3z$

(iv) 3

(3)

(d) $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 xy dx dy$ ৰ মান কিমান ?What is the value of $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 xy dx dy$?

(i) 3

(ii) 1

(iii) 2

(iv) 0

(e) যদি $\phi(u, v, w)$ যি কোনো এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন আৰু $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ আৰু $\hat{e}_3$ স্থানাংক বক্ৰ u, v আৰু w স্পৰ্শকৰ দিশত ক্ৰমে পৰস্পৰৰ অৰ্থগনৈল একক ভেক্টৰ, তেন্তে অৰ্থগনৈল কাৰ্ভিলিনিয়াৰ স্থানাংকত

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_1} \frac{d\phi}{du} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{d\phi}{dv} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{d\phi}{dw} \hat{e}_3$$

হ'ব

If $\phi(u, v, w)$ is any scalar point function and $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ and $\hat{e}_3$ are mutually orthogonal unit vectors along the tangents to the coordinate curves u, v and w respectively, then

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_1} \frac{d\phi}{du} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{d\phi}{dv} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{d\phi}{dw} \hat{e}_3$$

in orthogonal curvilinear coordinate is the

(i) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ গ্ৰেডিয়েন্টgradient of the function $\phi(u, v, w)$

(4)

- (ii) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ ডাইভাৰ্জেন্স
divergence of the function $\phi(u, v, w)$
- (iii) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ কৰল
Curl of the function $\phi(u, v, w)$
- (iv) $\phi(u, v, w)$ ফলনৰ লাপলাচিয়ান অপারেটৰ, ∇^2
Laplacian operator, ∇^2 of the
function $\phi(u, v, w)$

2. তলত দিয়া প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

2×4=8

Answer the following questions :

- (a) দেখুওৱা যে $|x|$ নিৰবিচ্ছিন্ন কিন্তু অৱকলজ কৰিব নোৱাৰি।

Show that $|x|$ is continuous but not differentiable.

- (b) বংচকিয়ান (Wronskian) কি? ইয়াক কি দৰে দুটা ফলনৰ বৈখিক নিৰ্ভৰশীলতা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

What is Wronskian? How is it used to find the linear dependence of two functions?

- (c) a ৰ কি মানৰ বাবে $\vec{A}$ আৰু $\vec{B}$ লম্ব হ'ব, যদি $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ আৰু $\vec{B} = 2a\hat{i} + a\hat{j} + 4\hat{k}$?

For what value of a , $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular, if $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{B} = 2a\hat{i} + a\hat{j} + 4\hat{k}$?

(5)

- (d) দেখুওৱা যে এখন সমতলৰ বাবে গ্ৰীনৰ উপপাদ্য ভেট্টবত

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_R \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{k} dR$$

Show that Green's theorem in a plane can be expressed in vector notation as

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_R \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{k} dR$$

অথবা / Or

গ্ৰীনৰ উপপাদ্যৰ দ্বাৰা দেখুওৱা যে কোনো এটা অঞ্চলৰ কালি

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

Show by Green's theorem that the area of a place can be expressed as

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

3. অৱকলজীয় সমীকৰণ এটাৰ কমপ্লিমেন্টৰি ফলন আৰু পাৰ্টিকোলাৰ ইণ্টিগ্ৰেল মানে কি? তলত দিয়া অৱকলজীয় সমীকৰণটো সমাধান কৰা

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

$$\text{যদি } y = (0) = 0 \text{ আৰু } y' = \frac{1}{2}$$

$$2+5=7$$

(6)

What are the complementary function and particular integral of a differential equation? Solve the following differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

if $y(0) = 0$ and $y' = \frac{1}{2}$.

অথবা / Or

যদি $y_1 = e^{-x} \cos x$, $y_2 = e^{-x} \sin x$ আৰু

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \text{ তেন্তে বংচকিয়ান (Wronskian)}$$

নিৰ্ণায়ক গণনা কৰা। প্রমাণ কৰা যে y_1 আৰু y_2 এ প্রদত্ত অৱকলজীয় সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। $4+3=7$

If $y_1 = e^{-x} \cos x$, $y_2 = e^{-x} \sin x$ and

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \text{ then calculate the}$$

Wronskian determinant. Verify that y_1 and y_2 satisfy the given differential equation.

4. (a) দেখুওৱা যে তলত দিয়া অৱকলজীয় সমীকৰণটো একজোঁট আৰু এইটো সমাধান কৰা :

$$(ax + by) dx + (bx + ly) dy = 0$$

(7)

Show that the following differential equation is exact and solve it :

$$(ax + by) dx + (bx + ly) dy = 0$$

- (b) প্রদত্ত সমীকৰণৰ ইন্টিগ্ৰেটিং ফেক্টৰ উলিয়াই সমাধান কৰা : 3

$$(xy^3 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4) dy = 0$$

Solve the given equation by finding the integrating factor :

$$(xy^3 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4) dy = 0$$

5. (a) স্কেলাৰ এটাৰ ডিৰেক্ষনেল ডেৰিভেটিভ মানে কি?

$\phi = xyz$ ৰ $(-1, 1, 3)$ ত $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ৰ দিশত

ডিৰেক্ষনেল ডেৰিভেটিভ উলিওৱা। $1+3=4$

What is directional derivative of a scalar?

Find the directional derivative of $\phi = xyz$ at $(-1, 1, 3)$ along $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, যদি $(\vec{C} \times \vec{A}) \times \vec{B} = 0$. 4

Prove $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, if $(\vec{C} \times \vec{A}) \times \vec{B} = 0$.

- (b) যদি $\vec{r}$ যি কোনো স্থানাংক ভেক্টৰ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $r^n \vec{r}$ অঘূৰ্ণ ভেক্টৰ।

3

If $\vec{r}$ is any position vector, then show that $r^n \vec{r}$ is irrotational vector.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$.

3

Prove that $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$

6. (a) গাউছৰ ডাইভাৰজেন্স উপপাদ্যটো লিখা। $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S}$ ৰ

মান উলিওৱা, য'ত $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ আৰু S ঘনকৰ পৃষ্ঠ, যাৰ চাৰিসীমা হ'ল $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

2+5=7

State Gauss' divergence theorem.

Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S}$, where

$\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ and S is the surface of the cube bounded by $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

- (b) জেকবিয়ান ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা $u = \frac{x-y}{x+y}$,

$v = \frac{xy}{(x+y)^2}$ ফলন দুটা এটা আনটোৰ অনিৰ্ভৰশীল

নহয়। সিহঁতৰ মাজৰ সম্বন্ধ উলিওৱা।

4

Use the Jacobian to prove that the functions $u = \frac{x-y}{x+y}$, $v = \frac{xy}{(x+y)^2}$ are not

independent of one another. Find the relation between them.

অথবা / Or

ষ্টকৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

4

Show by using Stokes' theorem that

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

7. কাৰ্ভিলিনিয়াৰ স্থানাংকবোৰ কি? গোলকীয় প'লাৰ স্থানাংকত গ্ৰেডিয়েণ্টৰ প্ৰকাশবাণী উলিওৱা।

2+5=7

What are curvilinear coordinates? Find the expression for gradient in spherical polar coordinates.

8. (a) সূত্র আৰু ধৰ্মৰ দ্বাৰা ডিৰাক ডেল্টা ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা।

2

Discuss about Dirac delta function with its definition and properties.

(10)

- (b) ডিৰাক ডেল্টা ফলনৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়াটোৰ মান উলিওৱা :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} \partial(t-2) dt$$

Evaluate the following using the properties of Dirac delta function :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} \partial(t-2) dt$$

9. (a) হাৰ্মিচিয়ান মেট্ৰিক্স কি ?

What is Hermitian matrix?

- (b) তলত দিয়া মেট্ৰিক্সটোৰ P মেট্ৰিক্স উলিওৱা যাতে $P^{-1}AP$ ডায়েগনেল মেট্ৰিক্স হয় :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Find matrix P of the following matrix such that $P^{-1}AP$ is diagonal matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(11)

অথবা / Or

তলত দিয়া মেট্ৰিক্সটো ডায়েগনেল মেট্ৰিক্সত পৰিৱৰ্তন কৰা :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix into a diagonal matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$
