Total No. of Printed Pages—15

2 SEM TDC GEMT (CBCS) 2 (A/B)

2 0 2 6

(May/June)

MATHEMATICS

(Generic Elective)

Paper : GE–2

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Paper : GE–2 (A)

(Differential Equations)

1. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : 2×4=8

Answer the following questions :

(a) তলৰ অৱকল সমীকৰণটো বিবেচনা কৰা :

Consider the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+6y=0$$

ইয়াৰ ডিগ্ৰী নিৰ্ণয় কৰা আৰু ৰৈখিক হয় নে নহয় লিখা। 1+1=2

What is its degree? Is it linear?

(b) ধৰা (Let)

$$F(x, y) = xy^2 + 2x^3y$$

সম্পূৰ্ণ অৱকলজ dF নিৰ্ণয় কৰা।

Find the total derivative dF.

(c) দেখুওৱা যে তলৰ অৱকল সমীকৰণটো যথাৰ্থ নহয় :

Show that the following differential equation is not exact :

$$ydx + 2xdy = 0$$

(d) তলৰ সমীকৰণটোৰ অনুকলন উৎপাদক উলিওৱা :

Find an integrating factor for the following equation :

$$y(1 + xy)dx + x(1 - xy)\,dy = 0$$

2. সমাধান কৰা (যি কোনো দুটা) : 4×2=8

Solve (any *two*) :

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{x + 2y - 3}$

(b) $(2x\cos y + 3x^2y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0, \; y(0) = 2$

(c) $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)\,dy = 0$

3. *(a)* Wronskian ৰ এটা বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কৰা। 1
State one property of Wronskian.

(b) প্ৰমাণ বা অপ্ৰমাণ কৰা : 2
Prove or disprove :

$\cos x$ আৰু $\sin x$ সকলো বাস্তৱ x ৰ কাৰণে ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

$\cos x$ and $\sin x$ are linearly independent for all real x.

(c) ধৰা হওক (Consider)

$$p = \frac{dy}{dx}$$

তলত দিয়া সমীকৰণবোৰ প্ৰমাণ কৰা : 2+5=7
Solve the following equations :

(i) $p^3 = 27x^4$

(ii) $p^2 - p(e^x + e^{-x}) + 1 = 0$

(d) দেখুওৱা যে প্ৰতিটো বাস্তৱ অন্তৰালত e^x আৰু e^{-x} তলৰ সমীকৰণটোৰ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান হয় : 4

Show that e^x and e^{-x} are two linearly independent solutions of the following equation on every real interval :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(e) তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো এটাৰ উত্তৰ লিখা : 6

Answer any *one* of the following questions :

(i) ধৰা হওক অৱকল সমীকৰণটো হ'ল

Consider the differential equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

দেখুওৱা যে x^2 আৰু $\frac{1}{x^2}$ দুটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান, য'ত $0 < x < \infty$. ওপৰোক্ত সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা আৰু $y(2) = 3$, $y'(2) = -1$ চৰ্তটো পূৰণ কৰা সমাধানটো লিখা। 3+1+2=6

Show that x^2 and $\frac{1}{x^2}$ are linearly independent solutions of this equation on the interval $0 < x < \infty$. Also, write the general solution of the given equation and write the solution that satisfies $y(2) = 3$, $y'(2) = -1$.

(ii) ধৰা $y = x$ তলৰ সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান :

Given that $y = x$ is a solution of the following equation :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

অৱৰোহীক্ৰম (reducing order) পদ্ধতিৰে ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান উলিওৱা। সাধাৰণ সমাধানটোও লিখা। 5+1=6

Find a linearly independent solution by reducing order. Also, write the general solution.

4. (a) তলৰ সমীকৰণটোৰ পৰিপূৰক ফলনটো উলিওৱা : 1

Find the complementary function of the following equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$$

(b) সমাধান কৰা : 2

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

(c) (i) তলৰ সমীকৰণটোৰ বিশিষ্ট সমাধান উলিওৱা : 4

Find a particular solution of the following equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$$

(অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰ সহায়ত)

(Use method of undetermined coefficients)

(ii) সমাধান কৰা : 4

Solve :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(b) তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো এটাৰ উত্তৰ লিখা : 5

Answer any one of the following questions :

(i) পৰিমিতিৰ পৰিবৰ্তন (variation of parameter) পদ্ধতিৰে তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

Apply variation of parameter to solve the following equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\tan x$$

(ii) চিস্টেমটো সমাধান কৰা :

Solve the system :

$$2\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}-3x=t$$

$$2\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}+3x+8y=2$$

5. *(a)* তলৰ সমীকৰণটোৰ ডিগ্ৰী আৰু মাত্ৰা উলিওৱা : 1+1=2

Find the order and degree of the following equation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)=2x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

(b) $z = Ae^{pt} \sin px$ ৰ পৰা ধ্ৰুৱক A আৰু p অপসাৰণ কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 2

Form a partial differential equation by eliminating constants A and p from

$$z = Ae^{pt} \sin px$$

(c) Lagrange ৰ অস্কেলেৰী সমীকৰণবোৰ উলিওৱা : 1

Find the Lagrange's auxiliary equations for

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x$$

(d) তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা : 3

Find the general solution of the following differential equation :

$$x^2 p + y^2 q = (x + y)z$$

(e) সমাধান কৰা (যি কোনো দুটা) : 4×2=8

Solve (any *two*) :

(i) $y^2 p - xyq = x(z - 2y)$

(ii) $p + 3q = 5z + \tan(y - 3x)$

(iii) $zpq = p + q$

(Charpit ৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা)

(Use Charpit's method)

6. (a) তলৰ সমীকৰণবোৰৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ধাৰণ কৰা : 1+1=2

Determine the nature of the following equations :

(i) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

(ii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(b) সমাধান কৰা (যি কোনো দুটা) : 5×2=10

Solve (any *two*) :

(i) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{dy^2} = x - y$

(ii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(iii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Paper : GE–2 (B)

(Econometrics)

1\. তলত দিয়াবোৰৰ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা/উত্তৰ দিয়া : $1 \times 8 = 8$

Choose the correct answer/Answer the following :

(a) ডাৰবিন-ৱাটচন *d*-পৰীক্ষা তলৰ কোনটো নিৰ্ণয়ৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হয় ?

Which of the following is detected by Durbin-Watson *d*-test?

(i) বিষম-বিচালিতা / Heteroscedasticity

(ii) স্বয়ং-সহসম্বন্ধ / Autocorrelation

(iii) বহু-সংৰেখতা / Multicollinearity

(iv) নিৰ্ধাৰণ সমস্যা / Specification problem

(b) মূক চলকৰ মান হ'ল

Dummy variable takes the value(s)

(i) যি কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা

any natural number

(ii) $-\infty$ ৰ পৰা $+\infty$ লৈকে

from $-\infty$ to $+\infty$

(iii) 0, 1

(iv) $\frac{\pi}{2}$

(Turn Over)

(c) β ৰ এটা পৰিমাপক $\hat{\beta}$ 'নিৰপেক্ষ' পৰিমাপ বুলি গণ্য কৰা হয়, যদিহে

An estimator $\hat{\beta}$ is said to be unbiased estimator of β if

(i) $E\hat{\beta}-\beta=0$

(ii) $E\hat{\beta}-\beta<0$

(iii) $E\hat{\beta}-\beta>0$

(iv) $E\hat{\beta}=0$

(d) স্বয়ং-সহসম্বন্ধ সমস্যাৰ উদ্ভৱ হয়, যেতিয়া

The problem of autocorrelation arises when

(i) $Eu_t^2 \neq \sigma^2$

(ii) $Eu_tu_s = 0$

(iii) $Eu_tu_s \neq 0$

(iv) $Eu_tx_t \neq 0$

(e) পৰীক্ষণৰ শক্তিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Define power of a test.

(f) বিষম-বিচালিতা উদ্ভৱ হোৱাৰ এটা কাৰণ উল্লেখ কৰা।

Mention one cause of the presence of heteroscedasticity.

(g) সমাশ্ৰয়ণ সমীকৰণ এটাত প্ৰাসংগিক চলকৰ পৰিহাৰকৰণৰ এটা ফলাফল উল্লেখ কৰা।

Mention one effect of omission of relevant variables in a regression equation.

(h) ৰৈখিক সমাশ্ৰয়ণ আৰ্হিত কোনটো অৱস্থায়ে বহু-সংৰেখতাৰ উপস্থিতিৰ সংকেত দিয়ে?

Which of the following indicates the presence of multicollinearity in a linear regression model?

(i) R^2ৰ মান নিম্ন আৰু লগতে t অনুপাতবোৰ কম তাৎপৰ্যপূৰ্ণ

Low R^2 associated with few significant t-ratios

(ii) R^2ৰ মান উচ্চ অথচ t অনুপাতবোৰ কম তাৎপৰ্যপূৰ্ণ

High R^2, but few significant t-ratios

(iii) VIF মানসমূহ 5তকৈ কম

VIF values are less than 5

(iv) Fৰ মান তাৎপৰ্যপূৰ্ণ

F value is significant

2. তলৰ যি কোনো চাৰিটাৰ ওপৰত চমু টোকা লিখা : 4×4=16

Write short notes on any *four* of the following :

(a) নিয়ন্ত্ৰিত R^2

Adjusted R^2

(b) প্ৰথম প্ৰকাৰ ক্ৰটি

Type–I error

(c) F-বণ্টনৰ ব্যৱহাৰ

Uses of F-distribution

(d) বহুসংৰেখতা উদ্ভৱ হোৱাৰ উৎস বা কাৰণসমূহ

Sources or causes of the presence of multicollinearlity

(e) মূক চলক ফান্দ

Dummy variable trap

3. (a) (i) প্ৰসামান্য বণ্টনৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ উল্লেখ কৰা। 6

Mention the properties of normal distribution.

(ii) আকলক আৰু আকলনৰ পাৰ্থক্য দৰ্শোৱা। আকলনৰ প্ৰকাৰসমূহ চমুকৈ আলোচনা কৰা। 3+3=6

Distinguish between estimator and estimate. Briefly discuss the types of estimation.

অথবা / **Or**

(b) (i) কাই-বৰ্গ বণ্টনৰ ওপৰত এটা টোকা লিখা। 6

Write a note on chi-square distribution.

(ii) তাৎপৰ্য স্তৰ কি?

What is level of significance? 3

(iii) এক-পুচ্ছ আৰু দ্বি-পুচ্ছ পৰীক্ষাৰ পাৰ্থক্য লিখা। 3

Write the difference between one-tailed test and two-tailed test.

4. (a) সমাশ্ৰয়ণ আৰ্হি $Y_i = a + bX_i + u_i$ দিয়া থাকিলে OLS আকলকসমূহ সৰ্বোত্তম ৰৈখিক নিৰপেক্ষ আকলক হয় বুলি প্ৰমাণ কৰা। 11

Given the regression model

$$Y_i = a + bX_i + u_i$$

prove that the OLS estimators are best linear unbiased estimators.

অথবা / **Or**

(b) নিম্নপ্ৰদত্ত তথ্যৰ পৰা ৰৈখিক সমাশ্ৰয়ণ সমীকৰণ Y-ৰ ওপৰত X আৰু X-ৰ ওপৰত Y আকলন কৰা :

Estimate linear regression equations of Y on X and X on Y from the following data :

X :	5	10	15	20	25
Y :	40	35	30	25	20

5\. (a) k-সংখ্যক চলক বৈখিক সমাশ্রয়ণ আৰ্হি $y = X\beta + u$-ৰ পৰা β-ৰ সাধাৰণ ন্যূনতম বৰ্গ আকলক নিৰ্ণয় কৰা। 11

Derive the ordinary least square estimator $\hat{\beta}$ from the k-variable linear regression model $y = X\beta + u$.

অথবা / Or

(b) বিক্ত প্ৰকল্প আৰু বিকল্প প্ৰকল্পৰ পাৰ্থক্য দৰ্শোৱা। প্ৰকল্প পৰীক্ষাৰ পদক্ষেপসমূহ আলোচনা কৰা। 2+9=11

Distinguish between null hypothesis and alternative hypothesis. Discuss the steps in hypothesis testing.

6\. (a) বহু-সংৰেখতাৰ পৰিণামসমূহ কি কি? বহু-সংৰেখতা নিৰাময়ৰ উপায়সমূহ আলোচনা কৰা। 3+8=11

What are the consequences of multicollinearity? Discuss the remedies of multicollinearity.

অথবা / Or

(b) বিষম-বিচালিতা চিনাক্তকৰণৰ যি কোনো দুটা উপায় আলোচনা কৰা। বিষম-বিচালিতা নিৰাময়ৰ উপায়সমূহ চমুকৈ আলোচনা কৰা। 6+5=11

Discuss any two methods of detecting heteroscedasticity. Discuss briefly the remedial measures of heteroscedasticity.

7. *(a)* নির্ধাৰণ সমস্যা কি? ধৰি লোৱা, এটা শুদ্ধ আৰ্হি হ'ল

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

কিন্তু, শুদ্ধ আৰ্হিটোৰ পৰিবৰ্তে তুমি ভুলতে আকলন কৰা আৰ্হিটো হ'ল

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + v_i$$

ইয়াৰ পৰিণামসমূহ দৰ্শোৱা।

5+6=11

What is specification problem? Suppose, a true model is

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

But instead of the true model you have wrongly estimated the model

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + v_i$$

Show the consequences.

অথবা / **Or**

(b) নির্ধাৰণ সমস্যাৰ পৰিমাণসমূহ কি কি? নির্ধাৰণ সমস্যা চিনাক্তকৰণৰ বাবে যি কোনো দুটা পদ্ধতি আলোচনা কৰা।

5+6=11

What are the consequences of specification problem? Discuss any two methods to detect specification problem.

★★★