

2 SEM FYUGP MINMTH 2

2026

(May/June)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH-2

(Real Analysis)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2½ hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. (a) ধরা হ'ল S , $\mathbb{R}$ -ব এটা অশূন্য পবিবদ্ধ সংহতি। যদি $a < 0$ আক $aS = \{as : s \in S\}$, তেন্তে প্রমাণ কৰা $\inf(aS) = a \sup S$. 2

Let S be a non-empty bounded set in $\mathbb{R}$.
If $a < 0$ and $aS = \{as : s \in S\}$, then prove that $\inf(aS) = a \sup S$.

- (b) $\mathbb{R}$ -ৰ আৰ্খিমিডিয় ধৰ্ম উল্লেখ কৰা। 2
State the Archimedian property of $\mathbb{R}$.
- (c) প্রমাণ কৰা যদি $t > 0$, $\exists n_t \in \mathbb{N}$ য'ত $0 < \frac{1}{n_t} < t$. 3
Prove that if $t > 0$, $\exists n_t \in \mathbb{N}$ such that $0 < \frac{1}{n_t} < t$.
- (d) দেখুওৱা যে (Show that) 3
$$\sup \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$
- (e) প্রমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{R}$ অগণনীয়। 4
Prove that the set of real numbers $\mathbb{R}$ is uncountable.
- অথবা / Or
- প্রমাণ কৰা যে $[0, 1]$ অন্তৰালত পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি গণনীয়।
Prove that the set of rational numbers in the interval $[0, 1]$ is countable.
- (f) বলজান'-ওৰেষ্ট্ৰাছ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা। 1
State Bolzano-Weirstrass theorem.

(Continued)

2. (a) বাস্তৱ অনুক্রমৰ আদিক্ষেত্ৰ লিখা। 1
Write the domain of a real sequence.
- (b) স্থিৰ অনুক্রম এটাৰ উদাহৰণ দিয়া। 1
Give an example of a constant sequence.
- (c) “সকলো অভিসাৰী অনুক্রম পৰিদ্ধ।” বিপৰীতটো সঁচা নে? ন্যায্যতা দিয়া। 4
“Every convergent sequence is bounded.” Is the converse true? Justify.
- (d) সীমাৰ ক’চিৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 4
Using Cauchy’s theorem on limits evaluate (any one) :
- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right]$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right]$
- (e) স্কুইজ উপপাদ্য উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা। 5
State and prove squeeze theorem.

অথবা / Or

অনুক্রমৰ ক'চিৰ অভিসাৰী সম্বন্ধীয় সাধাৰণ সূত্রটো বৰ্ণনা কৰা আৰু ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা যে $\langle S_n \rangle$ অনুক্রমটো, য'ত

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

অভিসাৰী হ'ব নোৱাৰে।

2+3=5

State Cauchy's general principle of convergence of a sequence and apply it to show that the sequence $\langle S_n \rangle$, where

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

cannot converge.

(f) প্রমাণ কৰা যে অনুক্রম $\left\langle \frac{n+1}{n} \right\rangle$ এটি ক'চি অনুক্রম। 4

Prove that the sequence $\left\langle \frac{n+1}{n} \right\rangle$ is a Cauchy sequence.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে অনুক্রম $\langle 1 + (-1)^n \rangle$ এটি ক'চি অনুক্রম নহয়।

Prove that the sequence $\langle 1 + (-1)^n \rangle$ is not a Cauchy sequence.

3. (a) প্রকান্তৰ শ্রেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define alternating series.

(b) তলৰ শ্রেণীটো অভিসাৰী হয়নে? কাৰণ দৰ্শোৱা : 2

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \infty$$

Is the following series convergent? Give reason :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \infty$$

(c) প্রমাণ কৰা যে শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ অভিসাৰী। 4

Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent.

(d) তলৰ শ্রেণীবোৰৰ অভিসাৰীতা বা অপসাৰীতা আলোচনা কৰা (যি কোনো এটা) : 4

Discuss the convergence or divergence of the following series (any one) :

$$(i) \log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} + \dots$$

$$(ii) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

4. (a) ডি-এলেম্বাৰ্টৰ অনুপাত পৰীক্ষাটো বৰ্ণনা কৰা আৰু তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : $1+3=4$

State D'Alembert's ratio test and examine the convergence of the following series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n+3} \cdot x^n, \quad x > 0$$

- (b) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : $4 \times 2 = 8$

Test the convergence of any two of the following :

(i) $\frac{1^2 \cdot 2^2}{1!} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2!} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3!} + \dots$

(ii) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$

(iii) $\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right)^{-3} + \dots$

(iv) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{2}{1+2\sqrt{3}} + \frac{3}{1+3\sqrt{4}} + \dots$

- (c) পৰম অভিসৰণ পৰীক্ষা কৰা (যি কোনো এটা) : 3

Test the absolute convergence (any one) :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n+1)!}$

(ii) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (0 < x < 1)$

(অতিৰিক্ত 20 নম্বৰ 2023 বৰ্ষৰ পৰীক্ষাৰ্থীৰ বাবে)

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

5. প্রমাণ কৰা যে $[0, 1]$ অন্তৰালত বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি অগণনীয়। 5

Prove that the set of real numbers in the interval $[0, 1]$ is uncountable.

অথবা / Or

বাস্তৱ সংখ্যাৰ আৰ্কিমিডিও ধৰ্ম প্রমাণ কৰা।

Prove the Archimedian property of real numbers.

6. দেখুওৱা যে বাস্তৱ সংখ্যা $\mathbb{R}$ -ত অনুক্রম এটাৰ সৰ্বাধিক এটা সীমাবিন্দু থাকে। 5

Show that a sequence in $\mathbb{R}$ have at most one limit point.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে $\langle S_n \rangle$ অনুক্রমটো অভিসাৰী য'ত

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

Prove that the sequence $\langle S_n \rangle$ is convergent where

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$