

2026

( May/June )

MATHEMATICS

( Core )

Paper : MTHC4B

( Riemann Integration and Series of Functions )

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions.*

1. (a) যি কোনো সীমাবদ্ধ ফলন  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  বাবে দেখুওৱা যে  $L(f, P) \leq U(f, P)$ , য'ত  $P$ ,  $[a, b]$ ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন হয়। 2
- For any bounded function  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , show that  $L(f, P) \leq U(f, P)$ , where  $P$  is any partition of  $[a, b]$ .
- (b) ধৰা হ'ল  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  এটা সীমাবদ্ধ ফলন আৰু  $P$  আৰু  $Q$ ,  $[a, b]$ ৰ পাৰ্টিশ্যন হয় আৰু  $P \subseteq Q$ . দেখুওৱা যে  $L(f, P) \leq L(f, Q)$ . 3
- Let  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  be bounded and  $P$  and  $Q$  are partitions of  $[a, b]$  and  $P \subseteq Q$ . Show that  $L(f, P) \leq L(f, Q)$ .
- (c) যদি  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  অনুকলনীয় হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে যি কোনো  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists [a, b]$ ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন  $P$  পোৱা যায় যাতে  $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ . 3

If  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is integrable, then show that for any  $\varepsilon > 0, \exists$  a partition  $P$  of  $[a, b]$  such that  $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ .

- (d) যদি  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  অবিচ্ছিন্ন হয়, দেখুওৱা যে  $f, [a, b]$  ত অনুকলনীয় হয়।

3

If  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous, show that  $f$  is integrable on  $[a, b]$ .

অথবা / Or

যদি  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ম'নটনিক হয়, দেখুওৱা যে  $f, [a, b]$  ত অনুকলনীয় হয়।

If  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is monotonic, show that  $f$  is integrable on  $[a, b]$ .

- (e) যদি  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  অৱকলজীয় হয় আৰু  $f', [a, b]$  ত অনুকলনীয় হয়, দেখুওৱা যে

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

4

If  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is differentiable and  $f'$  is integrable on  $[a, b]$ , show that

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

অথবা / Or

যদি  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, [a, b]$  ত বীমান অনুকলনীয় হয়, দেখুওৱা যে  $f, [a, b]$  ত সীমাবদ্ধ হয়।

If  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is Riemann integrable on  $[a, b]$ , show that  $f$  is bounded on  $[a, b]$ .

- (f) যদি  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $[a, b]$  ত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে এটা বাস্তৱ সংখ্যা  $c \in [a, b]$  পোৱা যায় যাতে

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$$

4

Show that if  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous on  $[a, b]$ , then  $\exists c \in [a, b]$  such that

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$$

অথবা / Or

যদি  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  সীমাবদ্ধ আৰু বীমান অনুকলনীয় হয়, দেখুওৱা যে  $f, [a, b]$  ত ডাৰ্বিউ অনুকলনীয় হয়।

If  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is bounded and Riemann integrable, then show that  $f$  is Darboux integrable on  $[a, b]$ .

2. (a)  $p$  ৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

3

Test the convergence of  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  for different values of  $p$ .

- (b) গামা ফলনৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা আৰু  $\Gamma(1) = 1$  হয় বুলি দেখুওৱা।

4+1=5

Test the convergence of gamma function and show that  $\Gamma(1) = 1$ .

অথবা / Or

বিটা ফলনৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

5

Test the convergence of beta function.

- (c) তলত দিয়াবোৰৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা  
(যি কোনো এটা) :

3

Test the convergence of the following  
(any one) :

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (ii) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

3. (a)  $[0, 1]$  অন্তৰালত বিন্দুমাট্ৰিক অভিসাৰী হোৱা ফলনৰ  
অনুক্ৰমৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো সমমাত্ৰিক অভিসাৰী নহয়।  
Give an example of a sequence of  
functions on  $[0, 1]$  which is pointwise  
convergent but not uniformly  
convergent.

1

- (b) প্রমাণ কৰা যে  $(f_n)$  অনুক্ৰমটো, য'ত  
 $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , সমমাত্ৰিকভাৱে 0 লৈ  $\mathbb{R}$ ত  
অভিসাৰী হয়।

2

Show that the sequence of functions  $(f_n)$   
where  $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  converges  
uniformly to 0 on  $\mathbb{R}$ .

- (c) তলত দিয়াবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো চাৰিটা) :  $4 \times 4 = 16$   
Answer the following (any four) :

- (i) দেখুওৱা যে  $(f_n)$  অনুক্ৰমটো, য'ত

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ ত বিন্দুমাট্ৰিক অভিসাৰী হয়।

Show that the sequence of  
functions  $(f_n)$ , where

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

converges pointwise on  $\mathbb{R}$ .

- (ii) দেখুওৱা যে  $(f_n)$ , য'ত  $f_n(x) = x^n$ ,  
 $x \in [0, a]$ ,  $a < 1$ , সমমাত্ৰিকভাৱে  $[0, a]$  ত  
অভিসাৰী হয়।

Show that the sequence of  
functions  $(f_n)$  where  $f_n(x) = x^n$ ,  
 $x \in [0, a]$ ,  $a < 1$  is uniformly  
convergent on  $[0, a]$ .

- (iii) ধৰা হ'ল  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  আৰু  $(f_n)$  এটা  $[a, b]$   
অন্তৰালত অনুকলনীয় ফলনৰ অনুক্ৰম। ধৰা হ'ল  
 $[a, b]$  অন্তৰালত  $f_n \rightarrow f$  হয়। দেখুওৱা যে  
 $[a, b]$ ত  $f$  অনুকলনীয় হয়।

Let  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  and  $(f_n)$  be a  
sequence of integrable functions on  
 $[a, b]$ . Let  $f_n \rightarrow f$  on  $[a, b]$ . Show that  
 $f$  is integrable on  $[a, b]$ .

- (iv) দেখুওৱা যে  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  শ্ৰেণীটো  $[0, 1)$  ত  $\frac{1}{1-x}$

লৈকে বিন্দুমাট্ৰিক অভিসাৰী হয় কিন্তু সমমাত্ৰিক  
অভিসাৰী নহয়।

Show that the series of functions

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  is pointwise convergent to  $\frac{1}{1-x}$  on  $[0,1)$  but not uniformly convergent on  $[0,1)$ .

(v) ধরা হ'ল  $\sum f_n$  বাস্তব শ্রেণীটো  $X$  অবিক্ত সংহতিত সমমাত্রিক অভিসারী হয়। দেখুওরা যে যি কোনো  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists K \in \mathbb{N}$  যাতে

$$n \geq m \geq K \Rightarrow |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in X$ . ইয়াৰ পৰা আকৌ দেখুওরা যে

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots, x \in [0,1]$$

শ্রেণীটো  $[0,1]$  ত সমমাত্রিক অভিসারী হয়।

Let the series of real functions  $\sum f_n$  be uniformly convergent on a non-empty set  $X$ . Show that for given  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists K \in \mathbb{N}$  s.t.

$$n \geq m \geq K \Rightarrow |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in X$ . Hence show that the series

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots, x \in [0,1]$$

is uniformly convergent on  $[0,1]$ .

4. (a) যদি  $(x_n)$  অনুক্রমটো

$$(2, -1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \dots)$$

হয়, তেন্তে  $\lim \sup (x_n)$  উলিওৱা।

1

Find  $\lim \sup (x_n)$ , where  $(x_n)$  is the sequence

$$(2, -1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \dots)$$

(b) সূচক শ্রেণী  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ৰ অভিসাৰিতাৰ ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

2

Find the radius of convergence of the power series  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

(c) তলত দিয়াবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো দুটা) :  $4 \times 2 = 8$

Answer the following (any two) :

(i) ধরা হ'ল  $0 < R \leq \infty$  আৰু  $\forall x$ , য'ত

$$|x-a| < R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \text{ শ্রেণীটো } f$$

ফলনটো লৈ  $(-r, r)$ -ত,  $\forall 0 < r < R$ , সমমাত্রিকভাৱে অভিসারী হয়। দেখুওৱা যে  $(-R, R)$ ত  $f$  অবিচ্ছিন্ন, আৰু অৱকলনীয় হয়

$$\text{য'ত } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Let  $0 < R \leq \infty$  and for all  $x$  with  $|x-a| < R$ , the series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

converges uniformly to a function  $f$  on  $(-r, r) \forall 0 < r < R$ . Show that  $f$  is continuous and differentiable on  $(-R, R)$  with  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

- (ii) ধরা হ'ল  $\varepsilon > 0$ , আৰু  $X = [-1, 1 - \varepsilon]$ .  
দেখুওৱা যে

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

সূচক শ্ৰেণীটো  $X$ ত সমমাত্রিকভাৱে অভিসাৰী হয়।  
Let  $\varepsilon > 0$ , and  $X = [-1, 1 - \varepsilon]$ . Show that the power series

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

is uniformly convergent on  $X$ .

- (iii) যদি  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়, তেন্তে

দেখুওৱা যে  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  সূচক শ্ৰেণীটো  $[0, 1]$ ত

সমমাত্রিকভাৱে অভিসাৰী হয়।

If the series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converges, then

show that the power series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converges uniformly on  $[0, 1]$ .

\*\*\*